Corso di fisica II

Prova scritta del primo modulo del 19/02/08

Esercizio 1

Per trovare il potenziale calcoliamo il potenziale rispetto a un elemento infinitesimo di filo e poi integriamo sul volume (ovvero sulla lunghezza del filo, che, vista la simmetria cilindrica del problema, esprimiamo in funzione dell'angolo θ). Per il filo interno:

$$\varphi_{INT}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

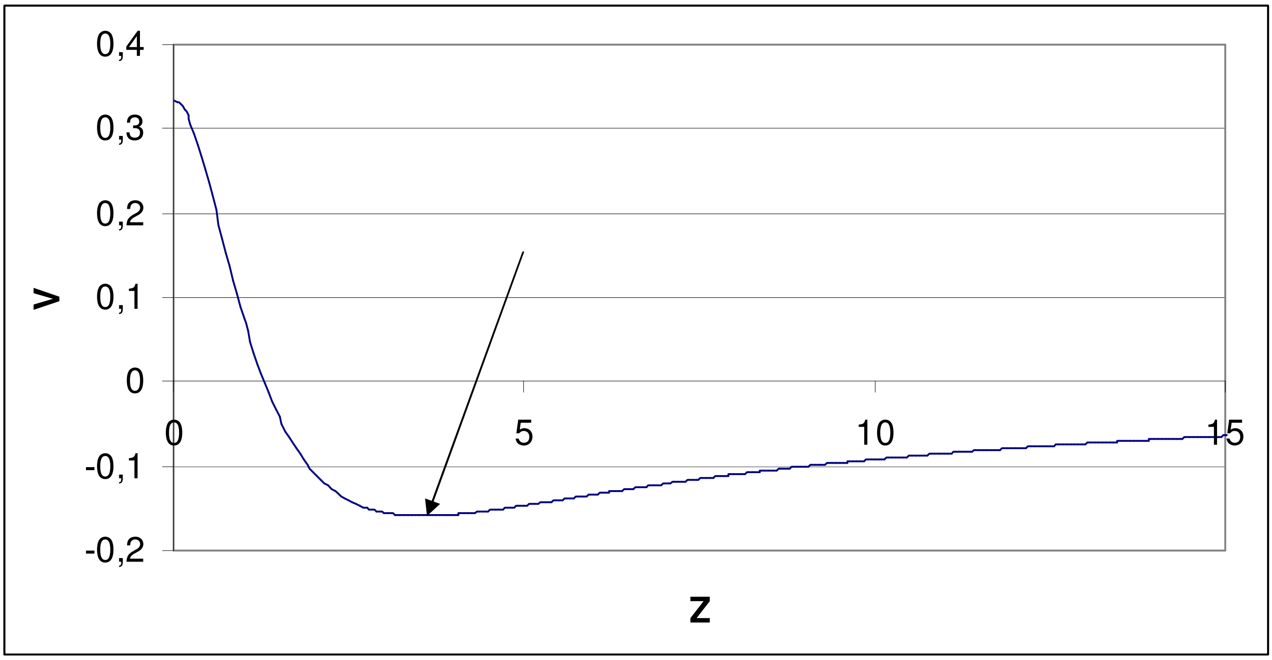
Analogamente, per il filo esterno risulterà:

$$\varphi_{EXT}(z) = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{9R^2+z^2}}$$

E in totale

$$\varphi_{TOT}(z) = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{9R^2+z^2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

In grafico è riportato il potenziale. La scala V è arbitraria. L'asse delle x è scalato per R = 1.



Il grafico è simmetrico rispetto all'asse Y.
Per un elettrone il grafico è da considerare ribaltato. In questo modo c'è un minimo assoluto in corrispondenza di z = 0 e c'è un massimo assoluto con posizione da determinare.
Calcoliamo quindi la derivata del potenziale rispetto a Z: troveremo tre punti stazionari, uno in zero, uno negativo e uno positivo. Considereremo quello positivo:

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\left(R^2+z^2\right)^{-3/2}2z + \left(9R^2+z^2\right)^{-3/2}2z\right] = 0$$

Poiché abbiamo detto che la soluzione z = 0 non ci interessa, possiamo raccogliere e semplificare z

$$0 = \left[-\left(R^2 + z^2\right)^{-3/2} + 2\left(9R^2 + z^2\right)^{-3/2} \right] \Rightarrow \left(\frac{9R^2 + z^2}{R^2 + z^2} \right)^{3/2} = 2 \Rightarrow \frac{9R^2 + z^2}{R^2 + z^2} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow$$

$$z_{MAX} = \sqrt{\frac{9 - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} - 1}} R = 3.55R$$

A questo punto troviamo il valore del massimo dell'energia potenziale per l'elettrone:

$$W_{MAX} = -q\varphi(z_{MAX}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + (3.55R)^2}} + \frac{2}{\sqrt{9R^2 + (3.55R)^2}} \right] = 1.37 \cdot 10^{-14} J$$

Poiché $\frac{1}{2} mv^2 \geq W_{MAX} \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2W_{MAX}}{m}} = 1.73 \cdot 10^6 m/s$

Esercizio 2

Questo esercizio si risolve applicando il teorema di Ampéré ad un rettangolo con un lato lungo h parallelo all'asse e uno radiale, che vada dall'esterno del condensatore fino al punto di interesse. Prima di effettuare i conti, ricordiamo che, per una bobina infinita, ci aspettiamo un campo magnetico costante al suo interno e un campo magnetico nullo al suo esterno.

Applicando il teorema di Ampéré si verifica immediatamente che all'esterno del condensatore il campo magnetico è nullo.
Anche all'interno del cilindro più piccolo il campo magnetico è nullo: considerando un rettangolo con un lato lungo l'asse e un lato esterno al condensatore, si nota che il contributo di corrente si annulla.
Nella regione compresa tra le due armature:

$$hB = \mu_0 \frac{Q}{T} = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega Q \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi h} \omega Q = 75nT$$

Si noti il termine h al denominatore: fissata la carica, aumentando la lunghezza, diminuisce la densità di carica e quindi la densità di corrente.